**电磁场的动量守恒 动量流密度张量**

2014/11/17

预备知识: [能流密度](#_流密度_1); [张量](#_张量); [张量的散度](#_张量的散度)

**结论**

假设电磁场动量守恒, 则动量流密度张量为



该张量也成为**麦克斯韦应力张量**(Maxwell Stress Tensor)

**推导**

能量是标量, 所以能流密度就是矢量. 但动量本身就是矢量, 要如何表示动量流密度呢?

我们可以分析动量在某方向分量的流密度.

根据[张量的散度](#_张量的散度)

假设电磁场满足动量守恒, 在闭合空间中, 有“转换速率+流出速率+增加速率=0” (类比电磁场的能量守恒公式).

则电磁场的动量守恒会有

 (2)

由广义[洛伦兹力](#_洛伦兹力)计算电荷的[受力密度](#_洛伦兹力)

 ([电流密度](#_流密度_1))

由于(2)式的后两项是电磁场的量, 不能含有关于电荷的量, 所以接下来要通过[麦克斯韦方程组](#_麦克斯韦方程组)把电荷密度和电流密度替换成电磁场.

 (电场散度)

 (磁场旋度)

代入上式, 得



其中

(电场旋度)

代入上式得



为了使式中电磁场的公式更加对称, 不妨加上一项

 (因为磁场散度)

得



一般来说, 凡是出现两个连续的叉乘要尽量化成点乘, 下面计算.

由吉布斯算子(劈形算符)的相关公式



令, 得

 即

同理得



代入得



与(2)式对比, 可以看出动量流密度张量的散度为



接下来由二阶张量的散度计算公式, 通过对比系数, 就可以求出动量流密度张量(三阶矩阵).

下面把等式右边的部分用求和符号表示(求和符号是张量分析中最常见的符号, 只有熟练运用才能学号张量分析). 下面推导用到了[克罗内克delta函数](#_克罗内克函数), 且定义任意矢量加上下标表示第个分量, 例如

.

是一个矢量, 它的第个分量



同理



所以



而由张量散度的定义



得到动量流密度张量为



理论上, 在上面加上任意一个满足的张量场, 均可以使电磁场动量守恒, 但是若规定无穷远处动量流密度为零, 则可以证明.